Buku Ajar
KALKULUS I

Rica Amalia, M.Si

uim Press

Buku Ajar Kalkulus 1

Rica Amalia, M.Si

Diterbitkan oleh:

UIM Press

Universitas Islam Madura

Buku Ajar

Kalkulus I

Disusun oleh Rica Amalia, M.Si

Diterbitkan untuk kalangan sendiri oleh

UIM Press
Universitas Islam Madura
Jl. PP. Miftahul Ulum Bettet Kabupaten Pamekasan 69351
Fax : (0324) 32178

Cover Image: Zaha Hadid

Layout: yukionna

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum. Wr. Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan nikmat dan karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ajar "Kalkulus I" ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada teladan mulia sepanjang zaman, baginda nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan kerabatnya.

Buku ajar ini ditulis dalam rangka melengkapi perangkat pembelajaran mata Kuliah Kalkulus I di lingkungan Universitas Islam Madura, yang merupakan mata kuliah wajib sekaligus mata kuliah inti keilmuan di Prodi Matematika dan beberapa prodi lain di Universitas Islam Madura. Buku ajar ini dilengkapi dengan soal – soal latihan disetiap akhir bab yang berfungsi untuk mengukur tingkat penguasaan mahasiswa pada topik yang telah dipelajari.

Harapan penulis, adanya buku ajar ini dapat membantu mahasiswa di lingkungan Universitas Islam Madura dalam proses menguasai Mata Kuliah Kalkulus I sehingga nantinya mahasiswa semakin matang serta terbentuk karakter teliti, runtut dan pantang menyerah serta memiliki kemampuan berfikir kritis dan analisis yang tinggi dalam menyelesaikan masalah.

Penulis mengucapkan terimakasih yang mendalam kepada pihak-pihak yang telah mendukung tersusunnya buku ajar ini khususnya kepada pimpinan UIM yang selalu memberikan motivasi dalam penulisan buku ajar. Penulis juga ucapkan terimakasih kepada UIM Press yang telah membantu penerbitan buku ajar ini.

Akhir kata, semoga buku ajar ini bermanfaat. Tentunya masih terdapat kekurangan-kekurangan dalam penulisan buku ajar ini. Oleh karena itu besar harapan kami untuk diberikan kritik dan saran demi perbaikan buku ini dimasa mendatang.

Wassalamu'alaikum. Wr. Wb.

Pamekasan, Desember 2022

Rica Amalia, M.Si

DAFTAR ISI

BAB 1
SISTEM BILANGAN REAL

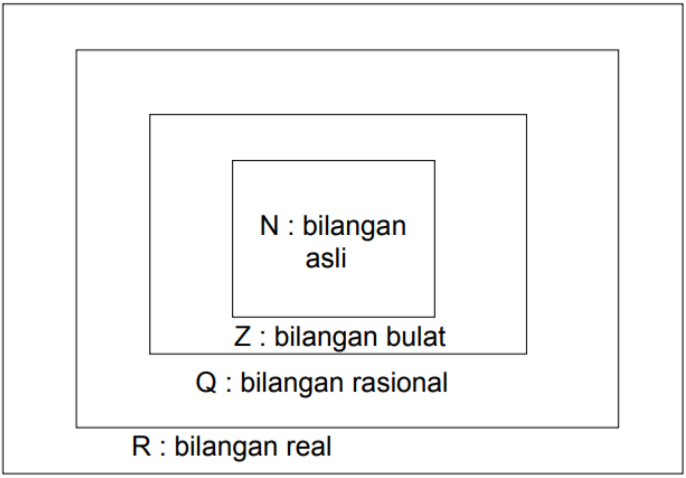
1.1 Bilangan Real

Dasar dari Kalkulus adalah sistem bilangan real dan sifat – sifatnya. Diberikan himpunan – himpunan bilangan sebagai berikut:

- Himpunan bilangan asli: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \ldots\}$
- Himpunan bilangan bulat:
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \ldots\}$$
- Himpunan bilangan rasional:
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

Bilangan real terdiri dari bilangan rasional dan irasional. Adapun bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$. Contoh bilangan irasional: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Adapun hubungan antara himpunan bilangan – bilangan di atas digambarkan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Bilangan Real

Setiap bilangan rasional dan irasional dapat dinyatakan dalam bentuk desimal. Terdapat perbedaan bentuk desimal antara bilangan rasional dan irasional. Pada bilangan rasional, bentuk desimalnya *berulang*, yaitu terdapat beberapa kelompok bilangan bulat tertentu di belakang tanda koma yang secara bersama-sama diulang berkali-kali. Contoh:

$$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots = 1{,}\overline{6}$$

$$\frac{4}{7} = 0{,}571428571428\ldots = 0{,}\overline{571428}$$

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots = 0{,}\overline{428571}$$

Jika kelompok angka berulang di belakang tanda koma adalah nol, biasanya tidak ditulis. Contoh:

$$\frac{3}{4} = 0{,}7500 \ldots = 0{,}75\overline{0} = 0{,}75$$

$$\frac{8}{25} = 0{,}3200 \ldots = 0{,}32\overline{0} = 0{,}32$$

Berikut ini diberikan contoh untuk menyatakan bentuk desimal bilangan rasional ke dalam bentuk pembagian bilangan bulat.

Contoh 1.1

Nyatakan bentuk desimal bilangan $0{,}3171717 \ldots$ ke dalam bentuk pembagian bilangan bulat.

Penyelesaian:

Misalkan, $x = 0{,}3171717 \ldots$

$10x = 3{,}171717 \ldots$

$1000x = 317{,}171717 \ldots$

Maka $1000x - 10x = 990x = 314$

Sehingga $x = \frac{314}{990} = \frac{157}{495}$

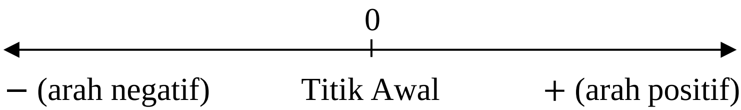
Jadi, $0{,}3171717 \ldots = \frac{157}{495}$

Kemudian pada bilangan irasional, bentuk desimalnya tidak berulang. Contoh:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots \qquad \pi = 3{,}1415926535\ldots$$

$$0{,}101001000100001\ldots$$

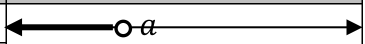
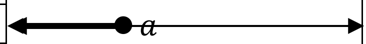
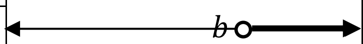
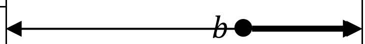
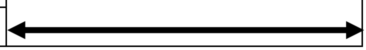
Bilangan real dapat digambarkan sebagai himpunan semua titik pada sebuah garis.



Gambar 1.2 Garis bilangan (real)

Setiap bilangan real mempunyai posisi pada suatu garis yang disebut dengan garis bilangan (real). Adapun himpunan bagian dari garis bilangan disebut *selang*.

Tabel 1.1 Selang bilangan real

Himpunan	Selang	Gambar Geometri
$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	
$\{x \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid x > b\}$	(b, ∞)	
$\{x \mid x \geq b\}$	$[b, \infty)$	
$\{x \mid x \in R\}$	$(-\infty, \infty)$	

1.2 Pertidaksamaan

Berikut ini adalah sifat – sifat pertidaksamaan bilangan real yang sering digunakan dalam kalkulus.

Diberikan bilangan – bilangan real $a, b, c,$ dan d

- Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$
- Jika $a < b$, maka $a \pm c < b \pm c$
- Jika $a < b$ maka $ac < bc$ untuk c positif dan $ac > bc$ untuk c negatif
- Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$
- Jika a dan b keduanya positif atau keduanya negatif dan $a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Contoh 1.2

Selesaikan pertidaksamaan $2x - 6 < 4x + 5$

Penyelesaian:

$$2x - 6 < 4x + 5$$

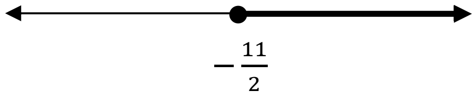
$$2x - 4x < 5 + 6$$

$$-2x < 11$$

$$x > -\frac{11}{2}$$

Jadi, penyelesaian: $\left(-\frac{11}{2}, \infty\right) = \left\{x \middle| x > -\frac{11}{2}\right\}$

Gambar:



Contoh 1.3

Selesaikan pertidaksamaan $4 \leq 2x + 7 < 5$

Penyelesaian:

$$4 \leq 2x + 7 < 5$$

$$-3 \leq 2x < -2$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -1$$

Jadi, penyelesaian: $\left[-\frac{3}{2}, -1\right) = \left\{x \middle| -\frac{3}{2} \leq x < -1\right\}$

Gambar:

Contoh 1.4

Selesaikan pertidaksamaan $x^2 - x < 2$

Pertidaksamaan:

$$x^2 - x < 2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0$$

Untuk menentukan penyelesaiannya pertama tentukan pembuat nol dari pertidaksamaan di atas. Diperoleh pembuat nol: $x = -1$ dan $x = 2$. Dua titik tersebut membagi garis bilangan menjadi 3 buah selang yaitu: $(-\infty, -1), (-1,2)$, dan $(2, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah hasil perkalian $(x+1)(x-2)$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

Selang	**Titik Uji**	**Tanda $(x+1)(x-2)$**
$(-\infty, -1)$	-2	$(-)(-) = +$
$(-1,2)$	0	$(+)(-) = -$
$(2, \infty)$	3	$(+)(+) = +$

Karena dari soal yang ditanyakan adalah kurang dari nol maka penyelesaian yang memenuhi adalah pada selang yang bertanda negatif yaitu

$$(-1,2) = \{x \mid -1 < x < 2\}$$

Gambar:

Contoh 1.5

Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \geq 1$

Penyelesaian:

$$\frac{2x-1}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x-1-x-2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{x+2} \geq 0$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh pembuat nol dari pembilang yaitu: $x = 3$ dan pembuat nol dari penyebut yaitu: $x = -2$. Sehingga diperoleh 3 buah selang yaitu: $(-\infty, -2), (-2{,}3)$, dan $(3, \infty)$.

Selanjutnya uji titik dari masing – masing selang sebagai berikut:

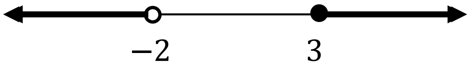
Selang	**Titik Uji**	**Tanda** $\frac{x-3}{x+2}$
$(-\infty, -2)$	-3	$(-)/(-) = +$
$(-2{,}3)$	0	$(-)/(+) = -$
$(3, \infty)$	4	$(+)/(+) = +$

Karena dari soal yang ditanyakan adalah lebih dari atau sama dengan nol maka penyelesaian yang memenuhi adalah pada selang yang bertanda positif yaitu

$$(-\infty, -2) \cup [3, \infty) = \{x | x < -2 \text{ atau } x \geq 3\}$$

Ingat bahwa $x = -2$ tidak termasuk penyelesaian karena penyebut dari suatu pecahan bilangan real tidak boleh bernilai nol.

Gambar:



1.3 Nilai Mutlak

Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Nilai mutlak dari x, dinotasikan $|x|$, dan didefinisikan oleh:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 1.6

$|2| = 2, \qquad |-3| = 3, \qquad \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}, \qquad |0| = 0$

Contoh 1.7

Selesaikan $|2x - 3| = 5$

Penyelesaian:

Menurut definisi nilai mutlak, maka terdapat 2 persamaan:

i. Untuk $2x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$$2x - 3 = 5$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

ii. Untuk $2x - 3 < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$

$$-(2x - 3) = 5$$

$$-2x + 3 = 5$$
$$-2x = 2$$
$$x = -1$$

Jadi, penyelesaian = $\{-1,4\}$

Contoh 1.8

Selesaikan $|2x + 3| = |x - 5|$

Penyelesaian:

Menurut definisi nilai mutlak, terdapat 4 persamaan:

i. $2x + 3 = x - 5$ untuk $2x + 3 \geq 0$ dan $x - 5 \geq 0$
ii. $2x + 3 = -(x - 5)$ untuk $2x + 3 \geq 0$ dan $x - 5 < 0$
iii. $-(2x + 3) = x - 5$ untuk $2x + 3 < 0$ dan $x - 5 \geq 0$
iv. $-(2x + 3) = -(x - 5)$ untuk $2x + 3 < 0$ dan $x - 5 < 0$

Karena Persamaan (i) sama dengan Persamaan (iv) begitu pula Persamaan (ii) sama dengan Persamaan (iii) maka terdapat 2 hasil yaitu

$$2x + 3 = x - 5$$

$$2x - x = -5 - 3$$

$$x = -8$$

dan $2x + 3 = -(x - 5)$

$$2x + 3 = -x + 5$$

$$2x + x = 5 - 3$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Jadi, penyelesaian = $\left\{-8, \frac{2}{3}\right\}$

- Sifat – sifat nilai mutlak

Jika a dan b bilangan real maka

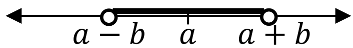
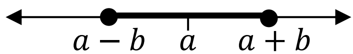
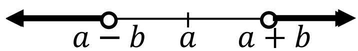
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- $|a| \geq 0$
- $|-a| = a$
- $|ab| = |a||b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

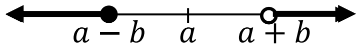
- Pertidaksamaan nilai mutlak

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b > 0$.

Maka solusi pertidaksamaan nilai mutlak dan gambarnya pada garis bilangan diberikan pada Tabel 1.2.

Tabel 1.2 Solusi pertidaksamaan nilai mutlak

Pertidaksamaan	Penyelesaian
$0 < \|x - a\| < b$	Himpunan: $\{x \mid a - b < x < a + b, x \neq a\}$ Selang: $(a - b, a) \cup (a, a + b)$ Gambar: 
$\|x - a\| < b$	Himpunan: $\{x \mid a - b < x < a + b\}$ Selang: $(a - b, a + b)$ Gambar: 
$\|x - a\| \leq b$	Himpunan: $\{x \mid a - b \leq x \leq a + b\}$ Selang: $[a - b, a + b]$ Gambar: 
$\|x - a\| > b$	Himpunan: $\{x \mid x < a - b$ atau $x > a + b\}$ Selang: $(-\infty, a - b) \cup (a + b, \infty)$ Gambar: 
$\|x - a\| \geq b$	Himpunan: $\{x \mid x \leq a - b$ atau $x \geq a + b\}$ Selang: $(-\infty, a - b] \cup [a + b, \infty)$

	Gambar: 

Contoh 1.9

Selesaikan $|2x + 1| < 3$

Penyelesaian:

$$|2x + 1| < 3$$

$$\left|2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| < 3$$

$$|2|\left|x + \frac{1}{2}\right| < 3$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$$

$$\left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{3}{2}$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh $a = -\frac{1}{2}$ dan $b = \frac{3}{2}$ sehingga penyelesaian:

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$-2 < x < 1$$

Cara lain. Pertidaksamaan nilai mutlak di atas dapat dituliskan kembali sebagai

$$-3 < 2x + 1 < 3$$

$$-4 < 2x < 2$$

$$-2 < x < 1$$

Jadi, penyelesaian: $\{x|-2 < x < 1\} = (-2,1)$

Contoh 1.10

Selesaikan $|3x - 2| \geq 4$

Penyelesaian:

$$|3x - 2| \geq 4$$

$$\left|3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right| \geq 4$$

$$|3|\left|x - \frac{2}{3}\right| \geq 4$$

$$\left|x - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{4}{3}$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh $a = \frac{2}{3}$ dan $b = \frac{4}{3}$ sehingga penyelesaian:

$$x \leq \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$x \leq -\frac{2}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Cara lain. Pertidaksamaan nilai mutlak di atas dapat dituliskan kembali sebagai

$$3x - 2 \leq -4 \text{ atau } 3x - 2 \geq 4$$

$$3x \leq -2 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$x \leq -\frac{2}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Jadi, penyelesaian:

$$\left\{x \middle| x \leq -\frac{2}{3} \text{ atau } x \geq 2\right\} = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [2, \infty)$$

Contoh 1.11

Selesaikan $\frac{2}{|x-4|} < \frac{1}{3}$

Penyelesaian:

Karena kedua ruas pertidaksamaan sama – sama bernilai positif, maka menurut sifat pertidaksamaan bilangan real pertidaksamaan di atas menjadi

$$\frac{|x-4|}{2} > 3$$

$$|x-4| > 6$$

Dari pertidaksamaan di atas diperoleh $a = 4$ dan $b = 6$ sehingga penyelesaian:

$$x < 4 - 6 \text{ atau } x > 4 + 6$$

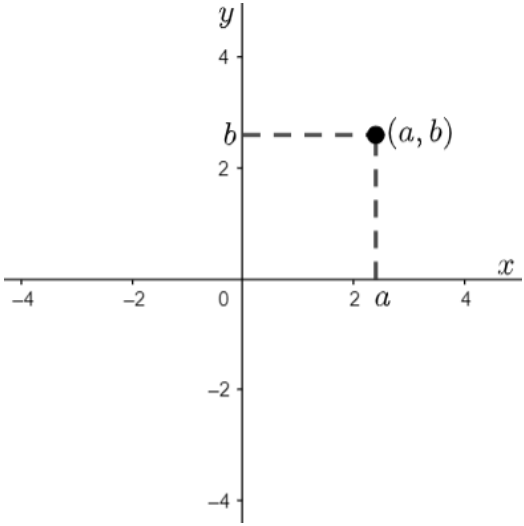
$$x < -2 \text{ atau } x > 10$$

Jadi, penyelesaian:

$$\{x | x < -2 \text{ atau } x > 10\} = (-\infty, -2) \cup (10, \infty)$$

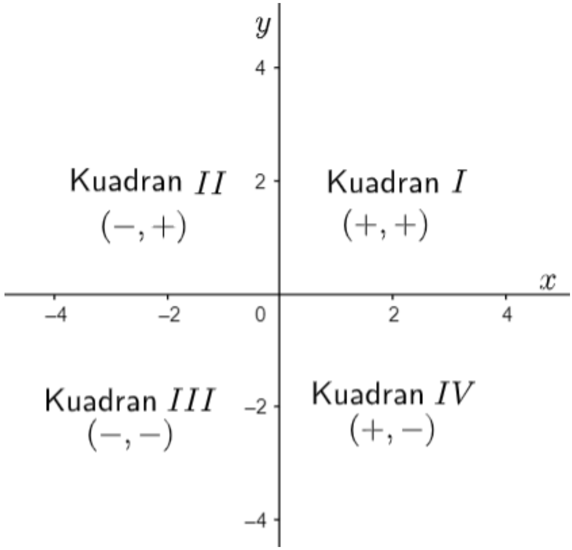
1.4 Sistem Koordinat Kartesius

Sistem koordinat Kartesius atau sistem koordinat siku – siku merupakan pasangan garis koordinat yang tegak lurus, yang disebut *sumbu – sumbu koordinat*, sedemikian hingga keduanya berpotongan di titik asal. Sumbu horizontal disebut sumbu$-x$ (*absis*) sedangkan sumbu vertikal disebut sumbu $-y$ (*ordinat*). Setiap pasangan terurut bilangan (a, b) dapat digambarkan sebagai sebuah titik pada koordinat tersebut. Begitu juga sebaliknya, setiap titik pada bidang koordinat Kartesius berkorespondensi dengan satu pasangan bilangan (a, b).



Gambar 1.2 Bidang koordinat Kartesius

Dari ilustrasi di atas, bidang koordinat Kartesius dapat dibagi menjadi empat daerah atau disebut *kuadran*, yang diilustrasikan dalam Gambar 1.3.



Gambar 1.3 Pembagian daerah (kuadran) pada bidang koordinat Kartesius

LATIHAN 1

1. Diantara bilangan yang diberikan di bawah ini, mana yang merupakan bilangan bulat, rasional, dan irasional?

   a. $-\frac{1}{4}$
   b. 0
   c. $\frac{48}{6}$
   d. $0,75$
   e. $-\sqrt{16}$
   f. $2^{1/2}$
   g. $-0,020202 \ldots$
   h. $7,000 \ldots$
   i. $0,232332333233332 \ldots$
   j. $0,68777 \ldots$
   k. $0,37623762 \ldots$
   l. $17\frac{4}{5}$

2. Sajikan bilangan desimal berikut sebagai pembagian bilangan bulat

   a. $0,12123123 \ldots$

   b. $12,777 \ldots$

   c. $38,078181 \ldots$

   d. $0,4296000 \ldots$

3. Selesaikan pertidaksamaan berikut dan buatlah sketsa penyelesaiannya pada garis bilangan
   a. $3x - 2 < 8$
   b. $3 + 7x \leq 2x - 9$
   c. $7 \leq 2 - 5x < 9$
   d. $\frac{x}{x-3} < 4$

e. $\frac{3x+1}{x-2} < 1$

f. $\frac{4}{2-x} \leq 1$

g. $x^2 > 9$

h. $x^2 - 3x - 10 > 0$

i. $\frac{2}{x} \leq \frac{3}{x-4}$

j. $\frac{1}{5}x + 6 \geq 14$

k. $2x - 1 > 11x + 9$

l. $-2 \geq 3 - 8x \geq -11$

4. Selesaikan persamaan nilai mutlak berikut

a. $|6x - 7| = |3 + 2x|$

b. $|4x + 5| = |8x - 3|$

c. $|9x| - 11 = x$

d. $2x - 7 = |x + 1|$

e. $\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6$

f. $\left|\frac{x-3}{x+4}\right| = 5$

5. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak berikut

a. $|2x - 3| \leq 6$

b. $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \geq 2$

c. $|5 - 2x| \geq 4$

d. $|7x + 1| > 3$

e. $\frac{1}{|x-1|} < 2$

f. $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$

BAB 2
FUNGSI DAN LIMITNYA

2.1 Fungsi

Misalkan A dan B adalah dua buah himpunan tak kosong. Fungsi dari A ke B adalah aturan yang menghubungkan *setiap anggota di A dengan tepat satu anggota di B*. Pada pembahasan fungsi disini dibatasi untuk $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Suatu fungsi yang memetakan A ke B dinotasikan oleh:

$$f : A \to B$$

$$x \to y = f(x)$$

Dari notasi di atas, $x \in A$ adalah variabel bebas, $y \in B$ adalah variabel tak bebas yang merupakan pasangan dari x, sedangkan f adalah aturan yang menghubungkan x dengan y. Kemudian, A adalah domain/ daerah asal/ daerah definisi dari f, dinotasikan oleh D_f, B adalah kodomain/ daerah kawan dari f, dinotasikan oleh C_f, dan $\{y | y = f(x), x \in A\}$ adalah range/ daerah hasil dari f, dinotasikan oleh R_f.

Contoh 2.1

Tentukan daerah hasil dari $f(x) = 3x - 4$ jika diketahui $D_f = \{x| - 5 < x < 5\}$

Penyelesaian:

$f(-5) = 3(-5) - 4 = -19$

$f(-4) = 3(-4) - 4 = -16$

$f(-3) = 3(-3) - 4 = -13$

$f(-2) = 3(-2) - 4 = -10$

$f(-1) = 3(-1) - 4 = -7$

$f(0) = 3(0) - 4 = -4$

$f(1) = 3(1) - 4 = -1$

$f(2) = 3(2) - 4 = 2$

$f(3) = 3(3) - 4 = 5$

$f(4) = 3(4) - 4 = 8$

$f(5) = 3(5) - 4 = 11$

Jadi, daerah hasil: $R_f = \{y| - 19 < y < 11\}$

Contoh 2.2

Tentukan daerah hasil dari $f(x) = x^2 - 4$ jika diketahui $D_f = \{x| - 5 < x < 5\}$

Penyelesaian:

$f(-5) = (-5)^2 - 4 = 21$

$f(-4) = (-4)^2 - 4 = 12$

$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$

$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$

$f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$

$f(0) = (0)^2 - 4 = -4$

$f(1) = (1)^2 - 4 = -3$

$f(2) = (2)^2 - 4 = 0$

$f(3) = (3)^2 - 4 = 5$

$f(4) = (4)^2 - 4 = 12$

$f(5) = (5)^2 - 4 = 21$

Jadi, daerah hasil: $R_f = \{y| - 4 < y < 21\}$

2.2 Operasi – Operasi pada Fungsi

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi – fungsi real. Maka

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x),\quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x),\quad D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x),\quad D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x|g(x) \neq 0\}$
- $f^n(x) = \underbrace{f(x)f(x)\ldots f(x)}_{n\text{ suku}}\quad D_{f^n} = D_f$

Contoh 2.3

Diberikan $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ dan $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Tentukan $f+g, f-g, fg, f/g$, dan f^5 beserta daerah asalnya.

Penyelesaian:

$$(f+g)(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt{4-x^2}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{4-x^2}$$

$$(fg)(x) = \sqrt[3]{x+2}\sqrt{4-x^2}$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f^5(x) = \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^5 = (x+2)^{5/3}$

Domain f adalah selang $(-\infty, \infty)$ sedangkan domain g adalah selang $[-2,2]$ sehingga domain $f+g, f-g, fg$ adalah irisan dari kedua selang tersebut yaitu $[-2,2]$. Kemudian domain f/g adalah $(-2,2)$ karena $g(x) \neq 0$ dan domain f^5 adalah $(-\infty, \infty)$.

- Fungsi Komposisi

Diberikan fungsi – fungsi f dan g, maka komposisi f dengan g, dinotasikan $f \circ g$, adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Dengan $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ dan $D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g \middle| g(x) \in D_f\right\}$

Contoh 2.4

Diberikan $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ dan $g(x) = \sqrt{2x}$. Tentukan

a. $(f \circ g)(x)$ b. $(g \circ f)(x)$

Penyelesaian:

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\sqrt{2x}\right) = \frac{\sqrt{2x}}{\left(\sqrt{2x}\right)^2 - 4} = \frac{\sqrt{2x}}{2x-4}$

Karena $D_g = [0, \infty)$ dan $D_f = (-\infty, \infty) - \{-2,2\}$ maka $D_{f\circ g}$ terdiri dari semua $x \in [0, \infty)$ sedemikian hingga $g(x) = \sqrt{2x}$ berada dalam $(-\infty, \infty) - \{-2,2\}$. Jadi, $D_{f \circ g} = [0, \infty) - \{2\}$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{x}{x^2-4}\right) = \sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$

Karena $D_f = (-\infty, \infty) - \{-2,2\}$ dan $D_g = [0, \infty)$ maka $D_{g \circ f}$ terdiri dari semua $x \in (-\infty, \infty) - \{-2,2\}$ sedemikian hingga $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ berada dalam $[0, \infty)$. Jadi, $D_{g \circ f} = (-2,0] \cup (2, \infty)$

2.3 Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi f pada bidang $-xy$ didefinisikan sebagai grafik dari persamaan $y = f(x)$

Contoh 2.5

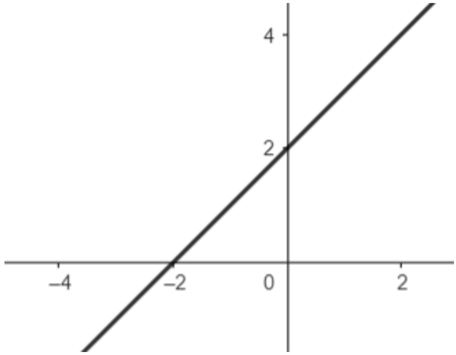
Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x + 2$

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x + 2$ adalah fungsi garis lurus sehingga untuk menggambarkannya cukup menentukan dua titik yang dilalui oleh garis tersebut.

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

Jadi, gambar grafik $f(x) = x + 2$ adalah



Contoh 2.6

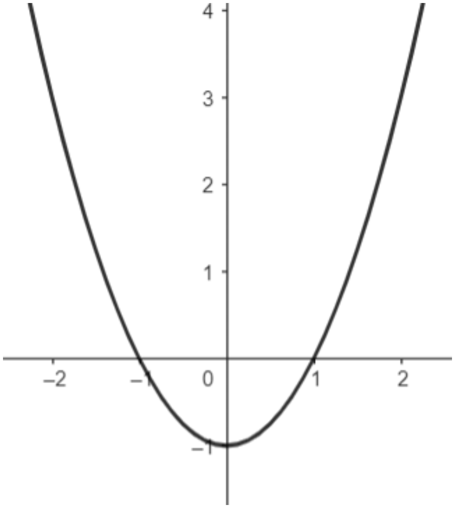
Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 1$

Penyelesaian:

Tentukan titik – titik koordinat yang dilalui oleh $y = x^2 - 1$

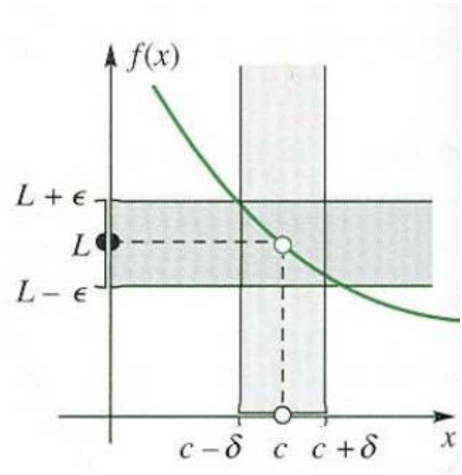
x	$y = x^2 - 1$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Jadi, gambar grafik $f(x) = x^2 - 1$ adalah



2.4 Limit Fungsi

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L, dinotasikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Gambar 2.1 Ilustrasi definisi limit

- Sifat – sifat limit

Misalkan f dan g dua buah fungsi dan $c, k \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to c} k = k$
- $\lim_{x \to c} x = c$
- $\lim_{x \to c} (kf)(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
- $\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} (f - g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} (fg)(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ jika $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x\to c} f^n(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n, \ n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ untuk $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$ jika n genap
- Jika $p(x)$ adalah polinomial maka $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$
- **Prinsip Apit:** Misalkan $f, g,$ dan h tiga fungsi dengan $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in I$. Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x\to c} f(x) = L$

Sifat – sifat limit fungsi trigonometri:

- $\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$ dan $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Contoh 2.7

Dapatkan nilai limit – limit berikut:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 + 3x^2 - 2x - 3)$
2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-3x}{3x^2-5x-7}$

Penyelesaian:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 2(2) - 3 = 16 + 12 - 4 - 3 = 21$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-3x}{3x^2-5x-7} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^4-3x)}{\lim_{x\to 3}(3x^2-5x-7)} = \frac{3^4-3(3)}{3(3)^2-5(3)-7} = \frac{81-9}{27-15-7} = \frac{72}{5}$

➢ Limit menuju tak hingga pada fungsi rasional

Fungsi rasional adalah $\frac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x)$ dan $q(x)$ adalah polinomial. Untuk mendapatkan nilai limit menuju tak hingga pada fungsi rasional, langkah pertama adalah membagi masing – masing polinomial dengan x^n, dimana n adalah derajat tertinggi dari polinomial penyebut.

Ingat bahwa: $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Contoh 2.8

Dapatkan nilai limit – limit berikut:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+4x}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x}{3x^2-5x-7}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2}{3x^3-5x}$

Penyelesaian:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+4x} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{4}{x}} = \frac{1-3(0)}{2+4(0)} = \frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4-3x}{3x^2-5x-7} : \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}-7} = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^2+2}{3x^3-5x} : \frac{x^3}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{3-\frac{5}{x^2}} = \frac{4(0)+2(0)}{3-5(0)} = 0$

2.5 Kontinuitas

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di titik c jika syarat – syarat berikut terpenuhi:

a. $f(c)$ terdefinisi
b. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada
c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Contoh 2.9

Diberikan

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ dan } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

Kedua fungsi di atas tidak kontinu di $x = 1$. Untuk fungsi f disebabkan $f(1)$ tidak terdefinisi, sedangkan untuk fungsi g disebabkan $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2 \neq g(1) = 3$.

Kekontinuan sepihak:

- Fungsi f disebut kontinu kiri di $x = c$ jika $f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x)$
- Fungsi f disebut kontinu kanan di $x = c$ jika $f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$

Kekontinuan pada interval:

- Fungsi f disebut kontinu pada interval buka (a, b) jika f kontinu di setiap titik pada (a, b)
- Fungsi f disebut kontinu pada interval tutup $[a, b]$ jika f kontinu pada (a, b), kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b

Sifat – sifat fungsi kontinu:

- Suatu polinomial $p(x)$ kontinu pada seluruh $\mathbb{R}$
- Fungsi rasional kontinu pada seluruh domainnya
- Fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di seluruh $\mathbb{R}$
- Fungsi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ kontinu di seluruh domainnya
- Jika f dan g kontinu di titik c dan $k \in \mathbb{R}$ maka: $kf, f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$ dengan $g(c) \neq 0$, f^n, dan $\sqrt[n]{f}$ kontinu di c.

LATIHAN 2

1. Dapatkan $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$,$(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ serta domainnya jika diketahui
   i. $f(x) = 2x,\ g(x) = x^2 + 1$
   ii. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = x - 2$
   iii. $f(x) = \frac{x}{1+x^2},\ g(x) = \frac{1}{x}$
   iv. $f(x) = x^3,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
   v. $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = |x|$
   vi. $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ g(x) = \sin 3x$
   vii. $f(x) = \sqrt{x-2},\ g(x) = \sqrt{x-3}$
   viii. $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \cos x$
2. Dapatkan nilai limit – limit berikut
   a. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x^3 - 3x - 1}$
   b. $\lim_{x\to -1} (x^6 - 12x + 1)$
   c. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x}{x+1}$
   d. $\lim_{x\to 0} \frac{6x-9}{x^3-12x+3}$
   e. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$
   f. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+8}{x+2}$
   g. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x+1}{2x-5}$
   h. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x-12}$

i. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x^7-4x^5}{2x^7+1}}$

j. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$

k. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{\sqrt{7+6x^2}}$

l. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^4+x}}{x^2-8}$

3. Dapatkan titik – titik diskontinuitasnya, jika ada:

a. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+7x-2}$

c. $f(x) = \frac{x}{|x|-2}$

d. $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{2x}{x+4}$

e. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 4 \\ 7 + \frac{16}{x} & x > 4 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$

BAB 3
DIFERENSIASI

3.1 Turunan Fungsi

Misalkan f sebuah fungsi real dan $x \in D_f$. Turunan dari f di titik x, dinotasikan dengan $f'(x)$, dan didefinisikan oleh

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$$

Proses mendapatkan turunan disebut ***diferensiasi***. Diferensiasi dapat dipandang sebagai suatu operasi yang diterapkan pada suatu fungsi f yang menghasilkan f'. Jika x adalah variabel bebas, maka operasi diferensiasi dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dx}[f(x)]$$

yang dibaca "***turunan f(x) terhadap x***"

Jadi, $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$

Jika terdapat variabel tak bebas $y = f(x)$, maka notasi di atas ditulis

$$\frac{d}{dx}[y] = f'(x)$$

atau dapat disederhanakan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

3.2 Teknik Diferensiasi

Berikut ini adalah rumus – rumus turunan pada fungsi real.

1. $\frac{d}{dx}[c] = 0$ untuk c konstanta
2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$ untuk c konstanta
3. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$
4. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$
5. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$
6. $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ untuk n bilangan real
7. $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$
8. $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$

9. $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$

10. $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

11. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$

12. $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

Contoh 3.1

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui

1. $y = 3x^8 - 2x^5 + 6x + 1$
2. $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$
3. $y = \frac{x^2-1}{x^4+1}$
4. $y = \frac{1}{x}$
5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $y = x^2 \tan x$
7. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Penyelesaian:

1. $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 8x^7 - 2 \cdot 5x^4 + 6 = 24x^7 - 20x^4 + 6x$

2. $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$
$= 28x^5 + 4x^3 - 7x^3 - x$
$= 28x^5 - 3x^3 - x$
$$\frac{dy}{dx} = 28 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 - 1 = 140x^4 - 9x^2 - 1$$
Cara lain. Misal, $u = 4x^2 - 1$ dan $v = 7x^3 + x$
Maka $u' = 8x$ dan $v' = 21x^2 + 1$
Sehingga
$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv'$$
$$= 8x(7x^3 + x) + (4x^2 - 1)(21x^2 + 1)$$
$$= 56x^4 + 8x^2 + 84x^4 + 4x^2 - 21x^2 - 1$$
$$= 140x^4 - 9x^2 - 1$$
3. Misal, $u = x^2 - 1$ dan $v = x^4 + 1$
Maka $u' = 2x$ dan $v' = 4x^3$
Sehingga
$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$= \frac{2x(x^4 + 1) - (x^2 - 1)4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$
$$= \frac{2x^5 + 2x - 4x^5 + 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$
$$= \frac{-2x^5 + 4x^3 + 2x}{(x^4 + 1)^2}$$
4. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x^{3/2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

6. Misal, $u = x^2$ dan $v = \tan x$

Maka $u' = 2x$ dan $v' = \sec^2 x$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv' = 2x\tan x + x^2\sec^2 x$$

7. Misal, $u = \sin x$ dan $v = 1 + \cos x$

Maka $u' = \cos x$ dan $v' = -\sin x$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(1 + \cos x) - \sin x\,(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

Ingat:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

➢ Turunan Tingkat Tinggi

Jika f' adalah turunan fungsi f, maka turunan dari f' dinotasikan dengan f''. Dengan demikian turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya dari fungsi f dinotasikan dengan

$$f', f'' = (f')', f''' = (f'')', f^{(4)} = (f''')', \ldots$$

Contoh 3.2

Jika $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$, maka

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$

$f'''(x) = 72x - 12$

$f^{(4)}(x) = 72$

$f^{(5)}(x) = 0$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = 0$ untuk $n \geq 5$

3.3 Aturan Rantai

Misalkan $f = f(u)$ dan $u = u(x)$ maka $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$

Contoh 3.3

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = 4\tan(x^3)$

Penyelesaian:

Misal, $u = x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

Maka $y = 4\tan(x^3) = 4\tan u \to \frac{dy}{du} = 4\sec^2 x$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= 4\sec^2 u \cdot 3x^2$$

$$= 12x^2 \sec^2 u$$

$$= 12x^2 \sec^2(x^3)$$

Contoh 3.4

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sin^2 x$

Penyelesaian:

Ingat: $\sin^2 x = (\sin x)^2$

Misal, $u = \sin x \to \frac{du}{dx} = \cos x$

Maka, $y = \sin^2 x = u^2 \to \frac{dy}{du} = 2u$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= 2u \cdot \cos x$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x$$

$$= \sin 2x$$

Contoh 3.5

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = (1 + x^5 \cot x)^{-8}$

Penyelesaian:

Misal, $u = 1 + x^5 \cot x$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4 \cot x + x^5(-\csc^2 x)$$

$$= 5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x$$

Maka $y = (1 + x^5 \cot x)^{-8} = u^{-8} \rightarrow \frac{dy}{du} = -8x^{-9}$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= -8u^{-9}(5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x)$$

$$= -8(1 + x^5 \cot x)^{-9}(5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x)$$

Contoh 3.6

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sin\sqrt{1 + \cos x}$

Penyelesaian:

Misal, $v = 1 + \cos x \to \frac{dv}{dx} = -\sin x$

Dan $u = \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{v} \to \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}$

Maka $y = \sin\sqrt{1 + \cos x} = \sin u \to \frac{dy}{du} = \cos u$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{v}}\sin x \cos u$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1 + \cos x}}\sin x \cos\sqrt{1 + \cos x}$$

3.4 Diferensiasi Implisit

Jika fungsi tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ maka untuk mendapatkan turunan $\frac{dy}{dx}$ adalah dengan menurunkan kedua ruas fungsi dengan memandang y sebagai fungsi x.

Contoh 3.7

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $6y^3 + \cos y = x^3$

Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx}(6y^3 + \cos y) = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$18y^2 \frac{dy}{dx} - \sin y \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$(18y^2 - \sin y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{18y^2 - \sin y}$$

Contoh 3.8

Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $7y^4 + x^3y + x = 4$

Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx}(7y^4 + x^3y + x) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$28y^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$28y^3\frac{dy}{dx} + x^3\frac{dy}{dx} = -3x^2y - 1$$

$$(28y^3 + x^3)\frac{dy}{dx} = -3x^2y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - 1}{28y^3 + x^3}$$

LATIHAN 3

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui

1. $y = 2 + \frac{1}{x^2}$
2. $y = (x^3 + 7x^2 - 8)\left(\frac{\sqrt{10}}{x^7}\right)$
3. $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(3x^3 + 27)$
4. $y = (x^5 + 2x)^2$
5. $y = \frac{x^5}{x^3-2}$
6. $y = (2x^7 - x^2)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
7. $y = x^{-5}(2x^9 + 1)$
8. $y = (x^2 + 2x)(4 - 3x)$
9. $y = \frac{\sec x}{1+\tan x}$
10. $y = \frac{\csc x}{\tan x}$
11. $y = \frac{\sin x \sec x}{1+x\tan x}$
12. $y = \frac{(x^2+1)\cot x}{3-\cos x \csc x}$

13. $y = (x^3 + 4x)^{15}$

14. $y = (3x^2 + 2x - 1)^6$

15. $y = \left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-2}$

16. $y = \frac{1}{(x^4+x+1)^9}$

17. $y = \frac{4}{(3x^2-2x+1)^3}$

18. $y = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$

19. $y = \sqrt{4 + 3\sqrt{x}}$

20. $y = \sin^3 x$

21. $y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

22. $y = \tan^4(x^3)$

23. $y = 2\sec^2(x^7)$

24. $y = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$

25. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

26. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

28. $\frac{y}{x-y} = x^2 + 1$

29. $x^2 - y^2 = 100$

30. $x^3 - y^3 = 6xy$

31. $x^2y + 3xy = 3x$

32. $\frac{xy^3}{1+\sec y} = 1 + y^4$

33. $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

34. $x^2 = \frac{\cot y}{1+\csc y}$

35. $\cos xy = y$

36. $\sin(x^2y^2) = x$

BAB 4
APLIKASI TURUNAN

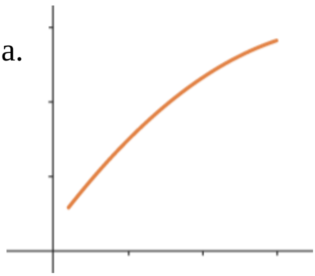
4.1 Selang Naik dan Selang Turun

Definisi 4.1

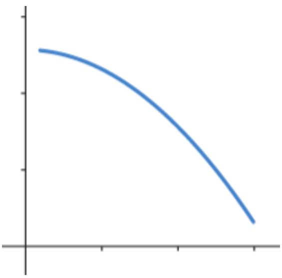
Misalkan f didefinisikan pada selang $I = [a, b]$. Untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ berlaku

a. f naik pada selang I jika $f(x_1) < f(x_2)$
b. f turun pada selang I jika $f(x_1) > f(x_2)$
c. f konstan pada selang I jika $f(x_1) = f(x_2)$

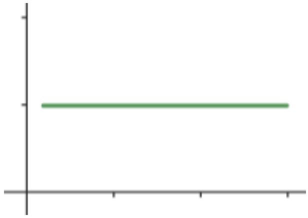
a.



b.



c.



Gambar 4.1 Fungsi a. naik, b. turun, c. konstan

Teorema 4.1

Misalkan f suatu fungsi kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan dapat diturunkan pada selang terbuka (a, b)

a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap nilai x dalam (a, b) maka f naik pada $[a, b]$

b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap nilai x dalam (a, b) maka f turun pada $[a, b]$

c. Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap nilai x dalam (a, b) maka f konstan pada $[a, b]$

Contoh 4.1

Tentukan selang naik dan selang turun dari fungsi – fungsi berikut

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Penyelesaian (1):

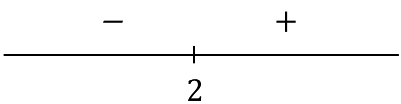
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 2x - 4$

Untuk menentukan apakah $f'(x) > 0, f'(x) < 0$, atau $f'(x) = 0$, tentukan pembuat nol dari $f'(x)$. Diperoleh pembuat nol: $x = 2$. Titik $x = 2$ membagi garis bilangan menjadi 2 buah selang yaitu: $(-\infty, 2)$ dan $(2, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = 2x - 4$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

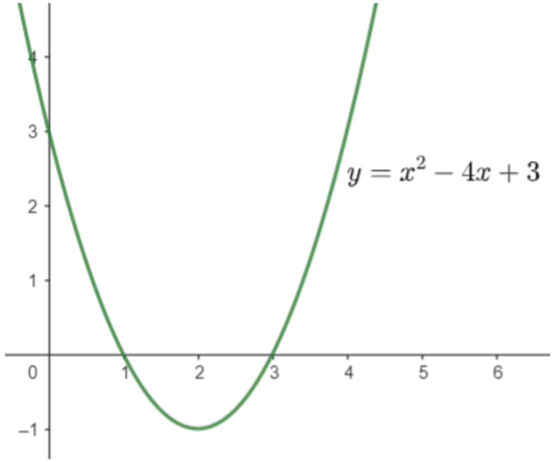
Selang	**Titik Uji**	**Tanda $2x - 4$**
$(-\infty, 2)$	0	$-$
$(2, \infty)$	3	$+$

sehingga



Jadi, selang naik: $[2, \infty)$ dan selang turun: $(-\infty, 2]$

Grafik $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ditunjukkan pada Gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Penyelesaian (2):

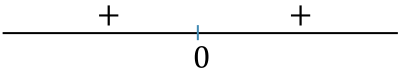
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

Pembuat nol dari $f'(x)$: $x = 0$. Titik $x = 0$ membagi garis bilangan menjadi 2 buah selang yaitu: $(-\infty, 0)$ dan $(0, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = 3x^2$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

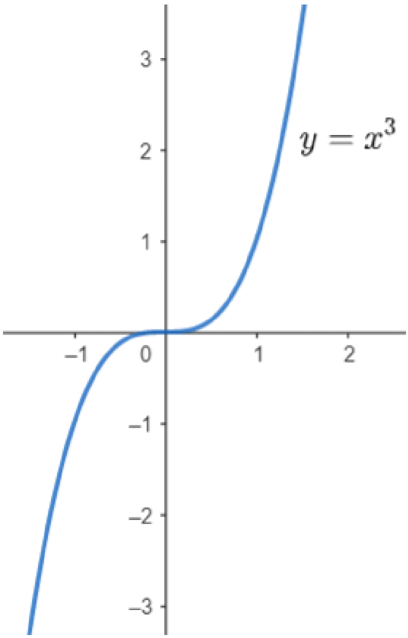
Selang	Titik Uji	Tanda $3x^2$
$(-\infty, 0)$	-1	$+$
$(0, \infty)$	1	$+$

sehingga



Jadi f selalu naik, atau selang naik: $(-\infty, \infty)$

Grafik $f(x) = x^3$ ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Grafik $f(x) = x^3$

Penyelesaian (3):

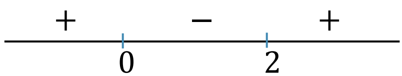
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Pembuat nol dari $f'(x)$: $x = 0$ dan $x = 2$. Titik tersebut membagi garis bilangan menjadi 3 buah selang yaitu: $(-\infty, 0)$, $(0,2)$, dan $(2, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = 3x(x - 2)$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

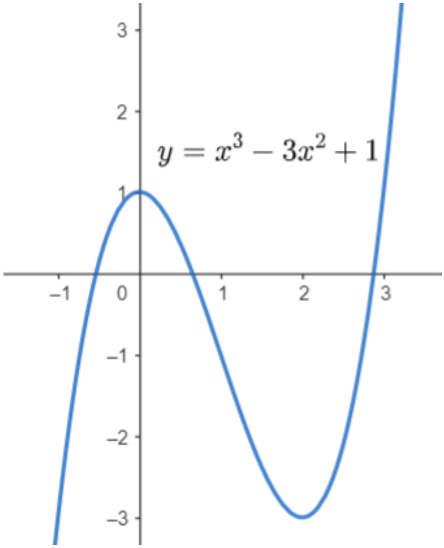
Selang	**Titik Uji**	**Tanda $3x(x-2)$**
$(-\infty, 0)$	-1	$(-)(-) = (+)$
$(0,2)$	1	$(+)(-) = (-)$
$(2, \infty)$	3	$(+)(+) = (+)$

sehingga



Jadi, selang naik: $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ dan selang turun $[0,2]$

Grafik $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ditunjukkan pada Gambar 4.4



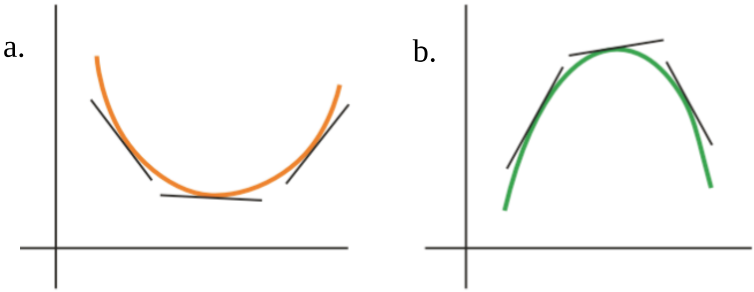
Gambar 4.4 Grafik $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

4.2 Kecekungan Fungsi

Definisi 4.2

Misalkan f dapat diturunkan pada selang terbuka $I = (a, b)$

a. f disebut cekung ke atas pada I jika f' naik pada selang I
b. f disebut cekung ke bawah pada I jika f' turun pada selang I



Gambar 4.5 a. Cekung ke atas, b. Cekung ke bawah

Definisi 4.3

Jika f kontinu pada suatu selang terbuka yang memuat x_0 dan jika f mengubah arah kecekungannya di x_0 maka titik $\left(x_0, f(x_0)\right)$ pada grafik f disebut *titik belok* dan dikatakan f mempunyai titik belok di x_0.

Gambar 4.6 Ilustrasi titik belok

Teorema 4.2

Misalkan f dapat diturunkan pada selang terbuka (a, b)

a. Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap nilai x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)

b. Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap nilai x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)

Contoh 4.2

Tentukan selang terbuka yang menyebabkan fungsi – fungsi berikut cekung ke atas dan cekung ke bawah, kemudian tentukan titik beloknya (jika ada)

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Penyelesaian (1):

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2 > 0$

Jadi f cekung ke atas pada: $(-\infty, \infty)$ seperti terlihat pada Gambar 4.2.

Karena f selalu cekung ke atas, maka f tidak memiliki titik belok.

Penyelesaian (2):

$f(x) = x^3$

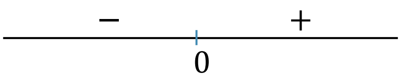
$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

Pembuat nol dari $f''(x)$: $x = 0$. Titik tersebut membagi garis bilangan menjadi 2 buah selang yaitu: $(-\infty, 0)$ dan $(0, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f''(x) = 6x$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

Selang	Titik Uji	Tanda $6x$
$(-\infty, 0)$	-1	$-$
$(0, \infty)$	1	$+$

sehingga



Jadi, f cekung ke atas pada: $(0, \infty)$ dan cekung ke bawah pada: $(-\infty, 0)$ seperti terlihat pada Gambar 4.3.

Karena pada titik $x = 0$ f mengubah arah kecekungannya maka titik belok: $\left(0, f(0)\right)$ dengan

$$f(0) = 0^3 = 0$$

Jadi, titik belok: (0,0)

Penyelesaian (3):

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

Pembuat nol dari $f''(x)$: $x = 1$. Titik tersebut membagi garis bilangan menjadi 2 buah selang yaitu: $(-\infty, 1)$ dan $(1, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f''(x) = 6x - 6$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

Selang	**Titik Uji**	**Tanda $6x - 6$**
$(-\infty, 1)$	0	$-$
$(1, \infty)$	2	$+$

sehingga

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 1 & \end{array}$$

Jadi, f cekung ke atas pada: $(1, \infty)$ dan cekung ke bawah pada: $(-\infty, 1)$ seperti terlihat pada Gambar 4.4.

Karena pada titik $x = 1$ f mengubah arah kecekungannya maka titik belok: $\left(1, f(1)\right)$ dengan

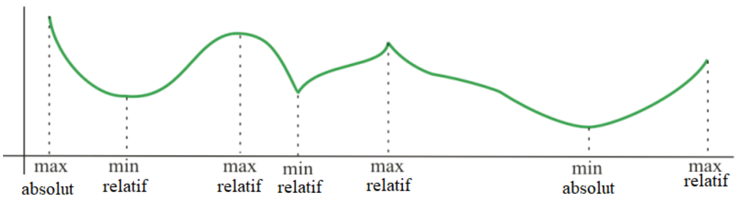
$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

Jadi, titik belok: $(1, -1)$

4.3 Ekstrim Relatif

Definisi 4.4

a. Fungsi f mempunyai ***maksimum relatif*** di x_0 jika terdapat interval (a, b) yang memuat x_0 sehingga $f(x_0) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$
b. Fungsi f mempunyai ***minimum relatif*** di x_0 jika terdapat interval (a, b) yang memuat x_0 sehingga $f(x_0) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$
c. Fungsi f mempunyai ***ekstrim relatif*** di x_0 jika fungsi tersebut mempunyai maksimum relatif atau minimum relatif



Gambar 4.7 Ilustrasi ekstrim relatif

Definisi 4.5

Titik kritis suatu fungsi f adalah nilai x dalam domain f dimana $f'(x) = 0$ atau dimana f tidak dapat diturunkan. Titik kritis dimana $f'(x) = 0$ disebut ***titik stasioner*** f.

Ekstrim relatif suatu fungsi selalu berada di titik kritis. Namun pada titik kritis belum tentu merupakan ekstrim relatif suatu fungsi. Untuk mendapatkan ekstrim relatif suatu fungsi terdapat dua metode, yaitu uji turunan pertama dan uji turunan kedua.

- **Uji Turunan Pertama**

Misalkan f kontinu di titik kritis x_0

a. Jika $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dari x_0 dan $f'(x) < 0$ di sebelah kanan dari x_0 maka f mempunyai maksimum relatif di x_0

b. Jika $f'(x) < 0$ di sebelah kiri dari x_0 dan $f'(x) > 0$ di sebelah kanan dari x_0 maka f mempunyai minimum relatif di x_0

c. Jika tidak memenuhi maka f tidak mempunyai ekstrim relatif

- **Uji Turunan Kedua**

Misalkan f dapat diturunkan dua kali di titik stasioner x_0

1. Jika $f''(x_0) > 0$ maka f mempunyai *minimum relatif* di x_0
2. Jika $f''(x_0) < 0$ maka f mempunyai *maksimum relatif* di x_0

Contoh 4.3

Tentukan ekstrim relatif dari

1. $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$

Penyelesaian (1):

$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$

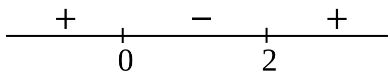
$$f'(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}} = 5x^{-\frac{1}{3}}(x-2) = \frac{x-2}{5x^{1/3}}$$

Titik kritis: $x = 0$ dan $x = 2$.

Titik kritis membagi garis bilangan menjadi 3 buah selang yaitu: $(-\infty, 0)$, $(0,2)$, dan $(2, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = \frac{x-2}{5x^{1/3}}$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

Selang	**Titik Uji**	**Tanda $\frac{x-2}{5x^{1/3}}$**
$(-\infty, 0)$	-1	$+$
$(0,2)$	1	$-$
$(2, \infty)$	3	$+$

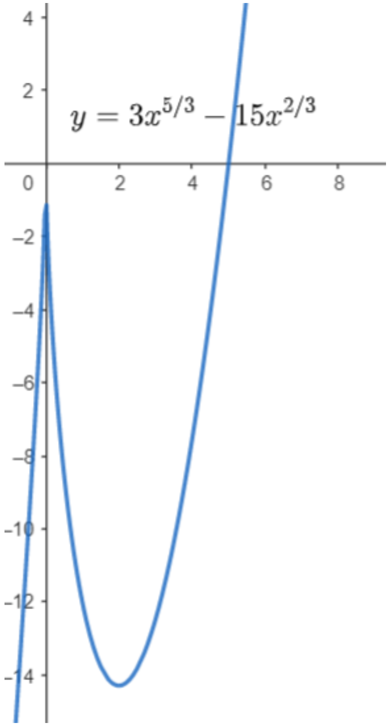
sehingga



Karena $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dari 0 dan $f'(x) < 0$ di sebelah kanan dari 0 maka f mempunyai maksimum relatif di $x = 0$.

Karena $f'(x) < 0$ di sebelah kiri dari 2 dan $f'(x) > 0$ di sebelah kanan dari 2 maka f mempunyai minimum relatif di $x = 2$.

Grafik $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ ditunjukkan pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Grafik $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$

Penyelesaian (2):

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

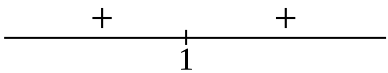
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

Titik kritis: $x = 1$

Titik kritis membagi garis bilangan menjadi 2 buah selang yaitu: $(-\infty, 1)$ dan $(1, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = 3(x-1)^2$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

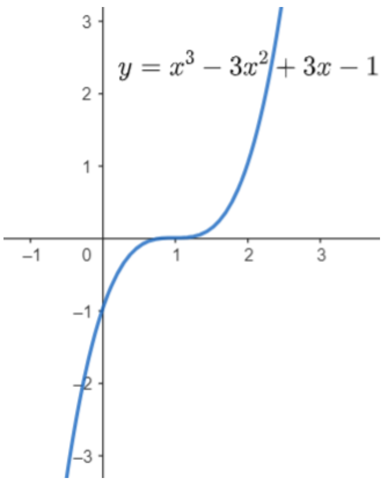
Selang	**Titik Uji**	**Tanda $3(x-1)^2$**
$(-\infty, 1)$	0	$+$
$(1, \infty)$	2	$+$

sehingga



Karena $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dan kanan dari 1 maka f tidak memiliki ekstrim relatif.

Grafik $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ditunjukkan pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Grafik $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Penyelesaian (3):

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1)$

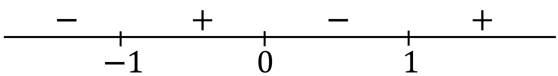
Titik kritis: $x = -1; x = 0; x = 1$

Cara 1. Uji Turunan Pertama

Titik kritis membagi garis bilangan menjadi 4 buah selang yaitu: $(-\infty, -1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, dan $(1, \infty)$. Uji salah satu titik pada tiap selang untuk menentukan apakah $f'(x) = 4x(x + 1)(x - 1)$ positif $(+)$ atau negatif $(-)$.

Selang	**Titik Uji**	**Tanda $4x(x + 1)(x - 1)$**
$(-\infty, -1)$	-2	$(-)(-)(-) = (-)$
$(-1,0)$	$-1/2$	$(-)(+)(-) = (+)$
$(0,1)$	$1/2$	$(+)(+)(-)(-)$
$(1, \infty)$	2	$(+)(+)(+) = (+)$

sehingga



Karena $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dari 0 dan $f'(x) < 0$ di sebelah kanan dari 0 maka f mempunyai maksimum relatif di $x = 0$.

Karena $f'(x) < 0$ di sebelah kiri dari -1 dan 1 dan $f'(x) > 0$ di sebelah kanan dari -1 dan 1 maka f mempunyai minimum relatif di $x = -1$ dan $x = 1$.

Cara 2. Uji Turunan Kedua

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

Uji titik kritis $x = -1; x = 0; x = 1$ ke turunan kedua diperoleh

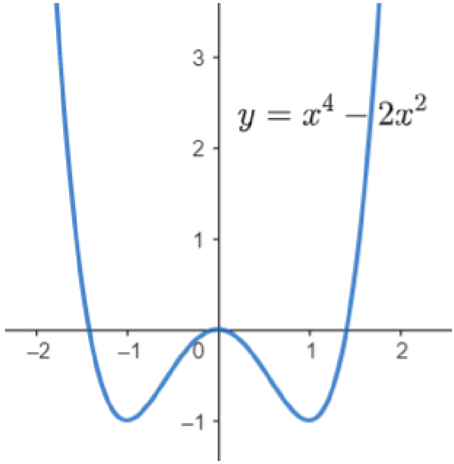
$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$

$f''(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$

$f''(1) = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$

Jadi f maksimum relatif di $x = 0$ dan f minimum relatif di $x = -1$ dan $x = 1$

Grafik $f(x) = x^4 - 2x^2$ ditunjukkan pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10 Grafik $f(x) = x^4 - 2x^2$

4.4 Nilai Maksimum atau Minimum Fungsi

Definisi 4.6

a. Jika $f(x_0) \geq f(x)$ untuk setiap x dalam domain f, maka $f(x_0)$ disebut ***nilai maksimum absolut*** atau ***nilai maksimum*** f.
b. Jika $f(x_0) \leq f(x)$ untuk setiap x dalam domain f, maka $f(x_0)$ disebut ***nilai minimum absolut*** atau ***nilai minimum*** f.
c. Nilai maksimum dan minimum fungsi f disebut ***nilai ekstrim absolut*** atau ***nilai ekstrim***.

Seringkali nilai ekstrim f dicari hanya pada selang tertentu dan bukan pada seluruh selang domain f.

Teorema 4.3

Jika suatu fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ maka f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a, b]$

Teorema 4.4

Jika suatu fungsi mempunyai nilai ekstrim maksimum atau minimum pada selang terbuka (a, b) maka nilai ekstrim terjadi di titik kritis.

Langkah mendapatkan nilai maksimum dan minimum fungsi f pada selang tertutup $[a, b]$:

1. Tentukan titik kritis f dalam (a, b)
2. Evaluasi f di setiap titik kritis dan di titik ujung a dan b
3. Nilai terbesar pada Langkah 2 adalah nilai maksimum f pada $[a, b]$ dan nilai terkecil adalah nilai minimumnya

Contoh 4.4

Tentukan nilai ekstrim dari fungsi

1. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ pada selang $[1,5]$
2. $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ pada selang $[-1,1]$

Penyelesaian (1):

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$$
$$= 6(x - 2)(x - 3)$$

Titik kritis: $x = 2$ dan $x = 3$

Evaluasi f di setiap titik kritis dan di titik ujung 1 dan 5 diperoleh

$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2)$

$= 16 - 60 + 72 = 28$

$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3)$

$= 54 - 135 + 108 = 27$

$f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1)$

$= 2 - 15 + 36 = 23$

$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5)$

$= 250 - 375 + 180 = 55$

Jadi, nilai maksimum $= 55$ dan nilai minimum $= 23$

Penyelesaian (2):

$f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$

$f'(x) = 8x^{1/3} - x^{-2/3} = x^{-2/3}(8x - 1) = \dfrac{8x - 1}{x^{2/3}}$

Titik kritis: $x = 0$ dan $x = \frac{1}{8}$

Evaluasi f di setiap titik kritis dan di titik ujung -1 dan 1 diperoleh

$f(0) = 6(0)^{\frac{4}{3}} - 3(0)^{\frac{1}{3}} = 0$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 3\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 6\left(\frac{1}{16}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3 - 12}{8} = -\frac{9}{8}$$

$f(-1) = 6(-1)^{\frac{4}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}}$

$= 6 - (-3) = 9$

$f(1) = 6(1)^{\frac{4}{3}} - 3(1)^{\frac{1}{3}}$

$= 6 - 3 = 3$

Jadi, nilai maksimum $= 9$ dan nilai minimum $= -\frac{9}{8}$

4.5 Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

Aplikasi masalah maksimum dan minimum suatu fungsi dapat dibagi menjadi dua kategori yaitu

1. Masalah maksimum dan minimum pada selang tertutup berhingga
2. Masalah maksimum dan minimum pada selang tak berhingga atau selang berhingga yang tidak tertutup (terbuka atau setengah tertutup)

Pada sub bab ini, akan dibahas untuk kategori yang pertama.

Langkah – langkah untuk menyelesaikan aplikasi masalah maksimum dan minimum:

1. Buatlah gambar yang sesuai dan berikan nama dari sifat – sifat yang terkait dengan permasalahan
2. Tentukan sebuah rumusan yang memenuhi untuk dimaksimumkan atau diminimumkan
3. Gunakan syarat – syarat yang ada untuk mengeliminasi variabel – variabel, kemudian tuliskan rumusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan sebagai fungsi satu variabel.
4. Tentukan selang dari nilai – nilai yang mungkin untuk variabel tersebut berdasarkan pembatasan fisik masalah
5. Gunakan cara – cara dari sub bab sebelumnya untuk mendapatkan nilai maksimum atau minimum

Contoh 4.5

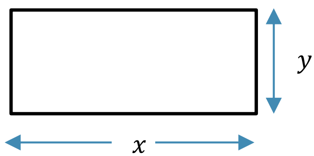
Tentukan ukuran dari persegi panjang yang mempunyai keliling 100 m agar luasnya sebesar mungkin.

Penyelesaian:

Misalkan, x: panjang persegi panjang
y: lebar persegi panjang
L: luas persegi panjang

Maka rumus luas yang akan dimaksimumkan

$$L = xy$$



Diketahui bahwa keliling persegi panjang 100 m sehingga

$$2x + 2y = 100 \rightarrow x + y = 50 \rightarrow y = 50 - x$$

$$L = xy = x(50 - x) = 50x - x^2$$

Karena x dan $y = 50 - x$ adalah panjang yang tidak negatif maka

$$0 \leq x \leq 50$$

Untuk mendapatkan luas maksimum maka tentukan titik kritis dari L.

$L' = 50 - 2x = 0 \rightarrow x = 25$

Nilai maksimum terjadi di salah satu titik

$x = 0, \qquad x = 25, \qquad x = 50$

Substitusikan nilai – nilai x ini ke rumus luas diperoleh:

$L(0) = 50(0) - 0^2 = 0$

$L(25) = 50(25) - 25^2 = 625$

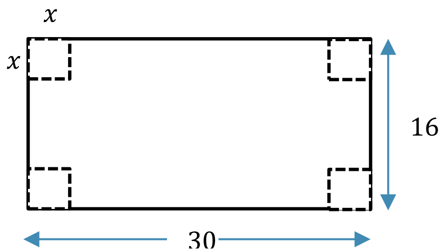
$L(50) = 50(50) - 50^2 = 0$

Jadi, persegi panjang yang memiliki luas maksimum berukuran panjang $25\ m$ dan lebar $25\ m$.

Contoh 4.6

Kotak terbuka dibuat dari lembaran karton berukuran $16\ cm \times 30\ cm$ dengan menggunting ke-empat sudutnya berbentuk bujur sangkar yang berukuran sama dan melipatnya ke sisi bagian atas. Berapakah ukuran bujur sangkar agar diperoleh kotak dengan isi terbesar?

Penyelesaian:



Dari ilustrasi di atas diperoleh

Panjang kotak $= 30 - 2x$
Lebar kotak $= 16 - 2x$
Tinggi kotak $= x$

Sehingga rumus isi (volume) kotak yang akan dimaksimumkan

$$V = (30 - 2x)(16 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$$

Karena panjang, lebar, dan tinggi kotak tidak negatif maka

$$0 \leq x \leq 8$$

Untuk mendapatkan isi kotak maksimum maka tentukan titik kritis dari V.

$$V' = 480 - 184x + 12x^2 = 0$$

$$\rightarrow 120 - 46x + 3x^2 = 0$$

$$(3x - 10)(x - 12) = 0$$

Titik kritis: $x = \frac{10}{3}$ dan $x = 12$

Karena $x = 12$ di luar selang $[0,8]$, maka nilai maksimum V terjadi di salah satu titik

$x = 0, \qquad x = \frac{10}{3}, \qquad x = 8$

Substitusikan nilai – nilai x ini ke rumus volume diperoleh:

$$V(0) \ = (30 - 2.0)(16 - 2.0)0 = 0$$

$$V\left(\frac{10}{3}\right) \ = \left(30 - 2.\frac{10}{3}\right)\left(16 - 2.\frac{10}{3}\right)\frac{10}{3}$$

$$= \left(\frac{90 - 20}{3}\right)\left(\frac{48 - 20}{3}\right)\frac{10}{3}$$

$$= \frac{70 \cdot 28 \cdot 10}{27} = \frac{19600}{27}$$

$$V(0) \ = (30 - 2.8)(16 - 2.8)8 = 0$$

Jadi, ukuran bujur sangkar agar diperoleh kotak dengan isi terbesar $= \frac{10}{3}\ cm \times \frac{10}{3} cm$

Contoh 4.7

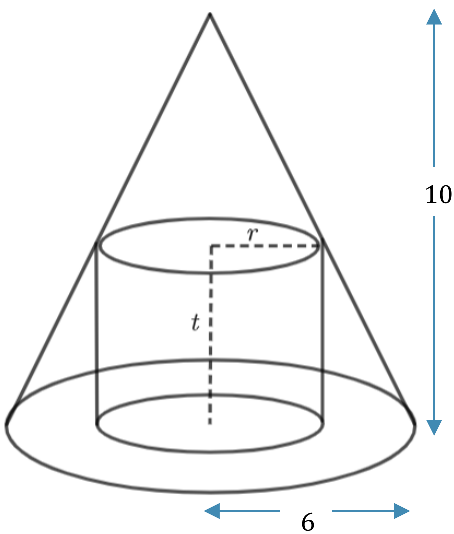
Tentukan jari-jari dan tinggi dari silinder dengan volume terbesar yang terdapat dalam kerucut dengan jari-jari 6 cm dan tinggi 10 cm.

Penyelesaian:

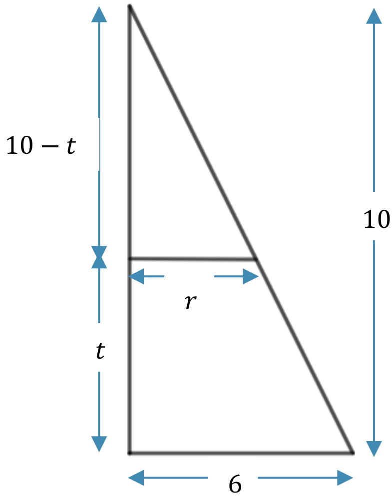
Misalkan, r: jari – jari silinder
t: tinggi silinder
V: volume silinder

Maka rumus luas yang akan dimaksimumkan

$$V = \pi r^2 t$$



Dari ilustrasi di atas dapat digambarkan hubungan antara jari – jari dan tinggi dari kerucut dengan jari – jari dan tinggi dari silinder yakni



Dari ilustrasi di atas diperoleh hubungan antara r dan t dengan perbandingan segitiga yang kongruen yaitu

$$\frac{10-t}{r} = \frac{10}{6}$$

$$10r = 60 - 6t$$

$$6t = 60 - 10r$$

$$t = 10 - \frac{5}{3}r$$

Substitusikan persamaan di atas ke rumus volume silinder diperoleh

$$V = \pi r^2 t = \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3} r\right) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3$$

Karena r dan $t = 10 - \frac{5}{3} r$ adalah panjang yang tidak negatif maka

$$0 \leq r \leq 6$$

Untuk mendapatkan volume maksimum maka tentukan titik kritis dari V.

$V' = 20\pi r - 5\pi r^2 = 0$

$\rightarrow 5\pi r(4 - r) = 0$

Titik kritis: $r = 0$ dan $r = 4$

Nilai maksimum terjadi di salah satu titik

$r = 0,$ $r = 4,$ $r = 6$

Substitusikan nilai – nilai r ini ke rumus volume diperoleh:

$V(0) = 10\pi(0)^2 - \frac{5}{3}\pi(0)^3 = 0$

$$V(4) = 10\pi(4)^2 - \frac{5}{3}\pi(4)^3$$

$$= 160\pi - \frac{320}{3}\pi$$

$$= \frac{480 - 320}{3}\pi = \frac{160}{3}\pi$$

$$V(6) = 10\pi(6)^2 - \frac{5}{3}\pi(6)^3$$

$$= 360\pi - 360\pi = 0$$

Jadi, jari-jari dan tinggi dari silinder dengan volume terbesar

$$r = 4\ cm$$

$$t = 10 - \frac{5}{3}(4) = \frac{30 - 20}{3} = \frac{10}{3}\ cm$$

LATIHAN 4

1. Tentukan selang naik, selang turun, selang kecekungan, dan titik belok (jika ada) dari fungsi – fungsi berikut.
   a. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
   b. $f(x) = -6 + 5x - x^2$
   c. $f(x) = (x+1)^3$
   d. $f(x) = 6 + 12x - x^3$
   e. $f(x) = x^3 - 4x + 3$
   f. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 16$
   g. $f(x) = 2x^4 + 8$
   h. $f(x) = x^3 + 15x - 2$
   i. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
   j. $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$
   k. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$
   l. $f(x) = 4x^3 - 6x + 7$

2. Tentukan ekstrim relatif dari
   a. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 9$
   b. $f(x) = x(x-2)^2$
   c. $f(x) = x^4 + 8x^3$
   d. $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$
   e. $f(x) = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$
   f. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
   g. $f(x) = 2 - x - x^2$
   h. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

i. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 9$
j. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

3. Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimum dari fungsi dengan selang berikut
   a. $f(x) = x^2 - 4x + 1$; [0,3]
   b. $f(x) = 6x - x^2$; [0,4]
   c. $f(x) = (x-2)^3$; [0,4]
   d. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; $[-3,3]$
   e. $f(x) = x + \tan x$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
   f. $f(x) = \cos x - \sin x$; $[0, \pi]$
   g. $f(x) = 2\sec x - \tan x$; $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
   h. $f(x) = \sin x + \cos^2 x$; $[-\pi, \pi]$
   i. $f(x) = 9 + |1 - x^2|$; $[-5,1]$
   j. $f(x) = |3 - 2x|$; $[-2,2]$
   k. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$; $[-5,1]$
   l. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2}$; $[-5,5]$

4. Selesaikan aplikasi masalah maksimum dan minimum berikut
   a. Nyatakan bilangan 12 sebagai jumlah dari dua bilangan nonnegatif yang hasil kalinya sebesar mungkin.
   b. Tentukan dua bilangan nonnegatif yang berjumlah 10 sedemikian hingga jumlah kuadratnya:

i. Sebesar mungkin
ii. Sekecil mungkin

c. Tentukan bilangan dalam selang tertutup $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ yang jumlah bilangan tersebut dan kebalikannya
   i. Sebesar mungkin
   ii. Sekecil mungkin
d. Sebidang tanah berbentuk persegi panjang dibatasi oleh pagar pada 3 sisi dan oleh sungai pada sisi ke-empat. Tentukan ukuran bidang tanah tersebut dengan luas maksimum yang dapat ditutup oleh 1200 meter pagar.
e. Sebidang tanah dipagar dengan dua macam pagar. Dua sisi akan menggunakan pagar dengan bahan bagus seharga Rp. 40.000,- per meter, sementara dua sisi yang lain menggunakan pagar biasa seharga Rp. 30.000,- per meter. Berapakah ukuran luas bidang terbesar yang dapat dipagar dengan biaya Rp. 80.000.000,-?
f. Suatu segiempat dilukiskan dalam segitiga yang mempunyai sisi saling tegak lurus dengan panjang 6 dan 10 cm. Tentukan ukuran dari segiempat tersebut agar diperoleh luas terbesar.
g. Segiempat mempunyai dua sudut bawah pada sumbu x dan dua sudut atas pada kurva $y = 4 - x^2$. Berapakah ukuran segiempat dengan luas terbesar?

h. Tentukan ukuran dari segiempat dengan luas maksimum yang dapat dilukiskan dalam lingkaran berjari-jari 12 cm.
i. Tentukan ukuran dari segiempat dengan luas terbesar yang dapat dilukiskan dalam setengah lingkaran berjari-jari 8 cm.
j. Jendela sebuah rumah yang terdiri dari segiempat yang bagian atasnya adalah setengah lingkaran memiliki keliling 50 cm. Tentukan jari-jari setengah lingkaran agar luas jendelanya maksimum.

BAB 5
INTEGRASI

5.1 Integral Tak Tentu

Suatu fungsi F disebut ***antiturunan*** dari fungsi f pada selang tertentu jika $F'(x) = f(x)$ untuk x dalam selang tersebut.

Proses mencari antiturunan disebut ***antidiferensiasi*** atau ***integrasi***. Jika terdapat fungsi F sedemikian hingga

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

maka fungsi berbentuk $F(x) + C$ juga merupakan antiturunan dari $f(x)$. Proses ini dinotasikan dengan

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (*)$$

Simbol $\int$ disebut ***tanda integral*** dan $f(x)$ disebut ***integran***. Pernyataan $(*)$ dibaca "*integral tak tentu dari $f(x)$ sama dengan $F(x)$ ditambah C*". Kata "*tak tentu*" digunakan karena ruas kanan dari $(*)$ bukan suatu fungsi tertentu, tetapi merupakan seluruh himpunan fungsi yang mungkin; konstanta C disebut ***konstanta integrasi***.

Notasi dx dalam operasi diferensiasi dan antidiferensiasi

$$\frac{d}{dx}[\quad] \quad \text{dan} \quad \int [\quad]\, dx$$

berperan untuk mengenali variabel bebasnya.

Rumus – rumus integrasi diberikan pada tabel berikut:

Rumus Diferensiasi	Rumus Integrasi
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x^n; n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cot x] = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

Sifat – sifat integrasi:

a. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$ untuk c konstanta
b. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Contoh 5.1

Selesaikan integrasi berikut

1. $\int(3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)dx$
2. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
3. $\int \frac{x^2-2x^4}{x^4} dx$

Penyelesaian:

1. $\int(3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)dx = \frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x + C$
2. $$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int \csc x \tan x \, dx \\ &= -\csc x + C\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x^4}{x^4} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^4} - \frac{2x^4}{x^4}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} - 2\right) dx \\ &= \int(x^{-2} - 2)dx \\ &= \frac{1}{-1}x^{-1} - 2x + C \\ &= -\frac{1}{x} - 2x + C\end{aligned}$$

5.2 Integrasi dengan Substitusi

Untuk menyelesaikan permasalahan integrasi yang lebih rumit, salah satu metode yang dapat digunakan adalah integrasi dengan substitusi. Meode ini digunakan untuk mengubah integrasi yang rumit ke bentuk yang lebih sederhana.

Metode substitusi bergantung pada rumus berikut, dengan u merupakan suatu fungsi dari x yang diferensiabel,

$$\int \left[f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = \int f(u) du$$

Langkah – langkah integrasi dengan substitusi:

1. Pilihlah u, misal $u = g(x)$
2. Tentukan $\frac{du}{dx} = g'(x)$
3. Substitusikan $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$. Pada langkah ini integrasi harus dalam suku-suku u; tidak boleh tersisa suku-suku dalam x. Jika tidak demikian, coba memilih u yang lain.
4. Selesaikan integral yang dihasilkan
5. Ganti u dengan $g(x)$ sehingga diperoleh jawaban akhir dalam suku-suku x

Contoh 5.2

Selesaikan integrasi berikut

1. $\int 2x(x^2+1)^{50}dx$
2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

Penyelesaian:

1. Misalkan, $u = x^2 + 1$

   $\rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2xdx$

   Maka

   $$\int 2x(x^2+1)^{50}dx = \int u^{50}du$$
   $$= \frac{1}{51}u^{51} + C$$
   $$= \frac{1}{51}(x^2+1)^{51} + C$$

2. Misalkan, $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

   $\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $\rightarrow 2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

   $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int 2\cos u\,du$$
   $$= 2\sin u + C$$
   $$= 2\sin\sqrt{x} + C$$

3. Misalkan, $u = x - 1 \rightarrow x = u + 1$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du = dx$$

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}du$$

$$= \int (u^2 + 2u + 1)u^{1/2}du$$

$$= \int \left(u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)du$$

$$= \frac{1}{7/2}u^{7/2} + \frac{2}{5/2}u^{5/2} + \frac{1}{3/2}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

5.3 Integral Tertentu

Definisi 5.1

Jika suatu fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \geq 0$ untuk semua x pada $[a, b]$, maka luas di bawah kurva $y = f(x)$ sepanjang selang $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$L = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Hubungan konsep luas dan limit pada Definisi 5.1 dapat dituliskan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \qquad (**)$$

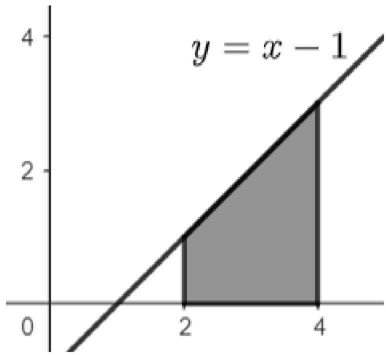
Ekspresi pada ruas kiri $(**)$ disebut ***integral tertentu dari*** $\boldsymbol{f}$ ***untuk*** $\boldsymbol{x = a}$ ***sampai*** $\boldsymbol{x = b}$, dimana b disebut batas atas dan a disebut batas bawah integrasi.

Contoh 5.3

Gunakan rumus luas yang tepat dari geometri bidang untuk menghitung integral tertentu berikut ini

1. $\int_2^4 (x-1)dx$
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Penyelesaian (1):

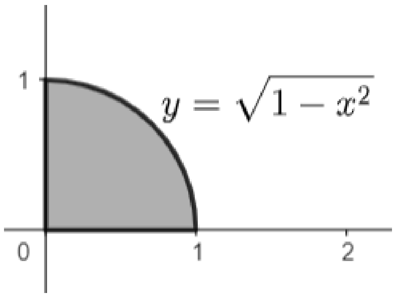


Gambar 5.1 Grafik fungsi $y = x - 1$

Berdasarkan Gambar 5.1, kurva $y = x - 1$ pada selang [2,4] adalah trapesium dengan Panjang sisi – sisi sejajar 1 dan 3 serta tinggi 2. Jadi,

$$\int_{2}^{4} (x-1)dx = \frac{1}{2}(1+3)\cdot 2 = 4$$

Penyelesaian (2):



Gambar 5.2 Grafik fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$

Berdasarkan Gambar 5.2, kurva $y = \sqrt{1 - x^2}$ pada selang [0,1] adalah seperempat lingkaran dengan jari – jari 1. Jadi,

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{4}(\pi \cdot 1^2) = \frac{\pi}{4}$$

Definisi 5.2

Jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$ yang bernilai positif dan negatif, maka nilai integral tertentu dari $y = f(x)$ pada selang $[a, b]$ didefinisikan sebagai

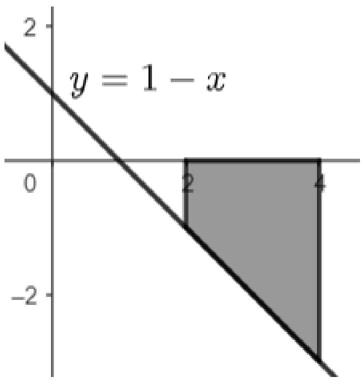
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Contoh 5.4

Gunakan rumus luas yang tepat dari geometri bidang untuk menghitung integral tertentu berikut ini

1. $\int_2^4 (1 - x)dx$
2. $\int_0^2 (x - 1)dx$

Penyelesaian (1):

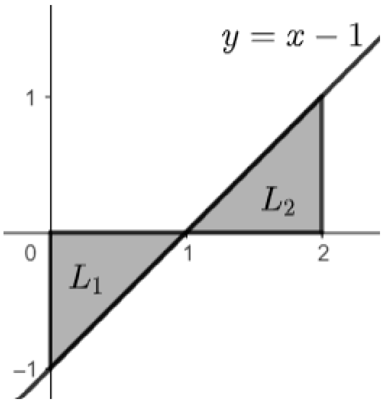


Gambar 5.3 Grafik fungsi $y = 1 - x$

Integrannya negatif sepanjang selang $[2,4]$, sehingga integral tersebut merupakan negatif dari luas trapesium yang diarsir pada Gambar 5.3. Jadi,

$$\int_{2}^{4}(1-x)dx = -\left(\frac{1}{2}(1+3)\cdot 2\right) = -4$$

Penyelesaian (2):



Gambar 5.4 Grafik fungsi $y = x - 1$

Berdasarkan Definisi 5.2, integral tersebut menyajikan luas yang terarsir diantara garis $y = x - 1$ dan selang $[0,2]$. Dengan menghitung luas kedua daerah segitiga pada Gambar 5.4 dan mengurangkannya diperoleh

$$\int_{0}^{2}(x-1)dx = L_2 - L_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Definisi 5.3

a. Jika a berada dalam domain f, maka didefinisikan

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

b. Jika f terintegral pada $[a, b]$, maka didefinisikan

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Contoh 5.5

1. $\int_1^1 x^2 dx = 0$
2. $\int_1^0 \sqrt{1-x^2}dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = -\frac{\pi}{4}$

Teorema 5.1

Jika f dan g terintegral pada $[a, b]$ dan jika c suatu konstanta maka cf , $f + g$, dan $f - g$ semuanya terintegral pada $[a, b]$ dan

a. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
b. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
c. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Teorema 5.2

Jika f terintegral pada suatu selang tertutup yang memuat tiga titik a, b, dan c, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tidak tergantung pada urutan titik - titik tersebut.

Contoh 5.6

Misalkan

$\int_1^5 f(x)dx = -1; \int_3^5 f(x)dx = 3;\ \int_3^5 g(x)dx = 4$

Dapatkan

a. $\int_3^5 [2f(x) - g(x)]dx$
b. $\int_1^3 f(x)dx$

Penyelesaian:

a. $\int_3^5 [2f(x) - g(x)]dx = 2\int_3^5 f(x)dx - \int_3^5 g(x)dx$
$= 2(3) - 4 = 2$
b. $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$
$-1 = \int_1^3 f(x)dx + 3$
$\int_1^3 f(x)dx = -1 - 3 = -4$

5.4 Teorema Fundamental Kalkulus Pertama

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan F adalah anti-turunan dari f pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 5.7

1. Hitung $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx$
2. Hitung $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

Penyelesaian:

1. $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + x\right]_0^3$
$$= \left(\frac{1}{4}(3)^4 - 2(3)^2 + 3\right) - (0)$$
$$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{81-60}{4} = \frac{21}{4}$$
2. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

LATIHAN 5

Selesaikan integrasi berikut

1. $\int\left(x^{-3}+\sqrt{x}-3x^{1/4}+x^{2}\right)dx$
2. $\int\left(x^{2/3}-4x^{-1/5}+4\right)dx$
3. $\int\left(\frac{7}{x^{3/4}}-\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}\right)dx$
4. $\int(2+x^{2})^{2}dx$
5. $\int(1+x^{2})(2-x)dx$
6. $\int\left(\frac{1-2x^{3}}{x^{3}}\right)dx$
7. $\int x^{1/3}(2-x)^{2}dx$
8. $\int\frac{x^{5}+2x^{2}-1}{x^{4}}dx$
9. $\int\frac{\sin x}{\cos^{2}x}dx$
10. $\int\left(\frac{1}{x^{2}}-\cos x\right)dx$
11. $\int[4\sin x+2\cos x]dx$
12. $\int[4\sec^{2}x+\csc x\cot x]dx$
13. $\int 2x(x^{2}+1)^{23}dx$
14. $\int\cos^{2}x\sin x\,dx$

15. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

16. $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\,dx$

17. $\int \sec^2(4x+1)\,dx$

18. $\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$

19. $\int (2x+7)(x^2+7x+3)^{4/5}dx$

20. $\int \cot x \csc^2 x\,dx$

21. $\int (1+\sin x)^9 \cos x\,dx$

22. $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

23. $\int x(2-x^2)^3 dx$

24. $\int x\sqrt{7x^2+12}\,dx$

25. $\int_{-1}^{2} x(1+x^3)dx$

26. $\int_{-3}^{0} (x^2-4x+7)dx$

27. $\int_{1}^{2} (x^2-2x+8)dx$

28. $\int_{0}^{1} (x^5-x^3+2x)dx$

29. $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$

30. $\int_1^2 \frac{1}{x^6}\,dx$

31. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + x^{-4}\right) dx$

32. $\int_{-2}^{-1} \left(x^{-4} - 3x^{-2} + \frac{1}{x^5}\right) dx$

33. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$

34. $\int_1^4 x^{-3/5} dx$

35. $\int_4^9 2x\sqrt{x}\,dx$

36. $\int_1^8 (5x^{2/3} - 4x^{-2}) dx$

DAFTAR PUSTAKA

1. Djohan, W., Budhi, W.S., *Diktat Kalkulus I*, Departemen Matematika ITB, 2007

2. Dosen-dosen Jurusan Matematika, *Seri Buku Ajar Kalkulus I*, 4^{th} edition, Jurusan Matematika FMIPA ITS, 2011

3. Gilbert, S., *CALCULUS*, Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 2000

4. Varberg, D., Purcell, J.E., Rigdon, S.E., *CALCULUS*, 9^{th} edition, Prentice-Hall, New Jersey, 2007

Buku ajar ini adalah salah satu perangkat pembelajaran mata kuliah Kalkulus 1 di lingkungan Universitas Islam Madura, yang merupakan mata kuliah wajib dan mata kuliah inti keilmuan di Prodi Matematika dan beberapa prodi lain di Universitas Islam Madura.

Materi pada buku ajar ini terdiri dari sistem bilangan real, fungsi dan limitnya, diferensiasi, aplikasi turunan, dan integrasi.

Pada setiap akhir bab diberikan soal – soal latihan yang berfungsi untuk mengukur tingkat penguasaan mahasiswa pada topik yang dipelajari.

uim Press
Kampus Hijau UIM Pamekasan
Jln. PP. Miftahul Ulum Bettet Pamekasan